Ensembles de nombres

1. Quelques ensembles de nombres

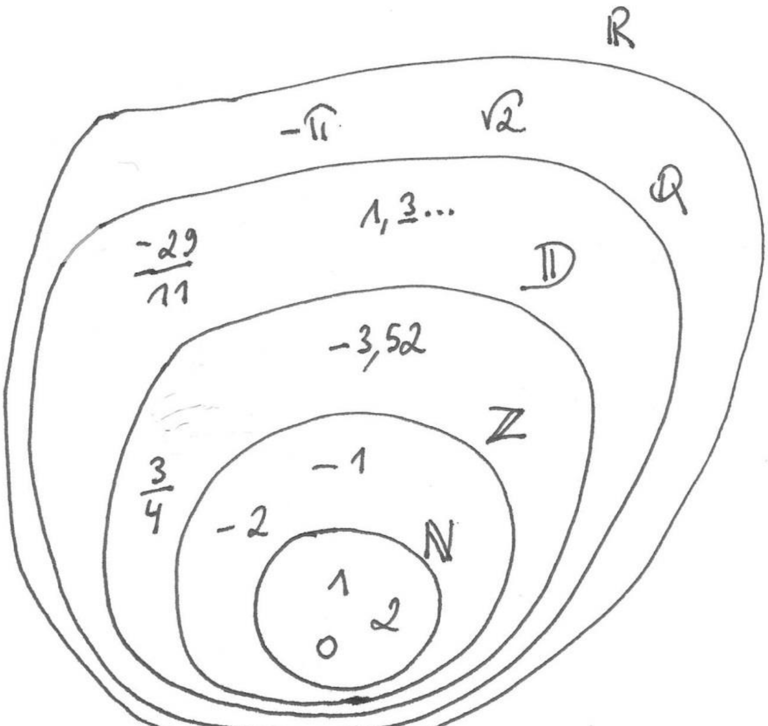
L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N} = \{0,1,2, \dots\}$.
L'ensemble des nombres entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

L'ensemble des nombres décimaux $\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres qui possèdent un développement décimal limité. Voici quelques nombres décimaux : 0 ; 1 ; -1 ; $0{,}75$; $-3{,}52$.

L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme de fraction. Voici quelques nombres rationnels : $0 = \frac{0}{1}$; $1 = \frac{1}{1}$; $-1 = \frac{-1}{1}$; $-3{,}52 = \frac{-352}{100}$; $1{,}\underline{3}\ldots = \frac{4}{3}$; $-2{,}\underline{63}\ldots = \frac{-29}{11}$.
Remarque $1{,}\underline{3}\ldots \notin \mathbb{D}$ car $1{,}\underline{3}\ldots$ ne possède pas de développement décimal limité.

$\mathbb{R}$ est le symbole utilisé pour dénoter l'ensemble des nombres réels.
Il est facile de prouver que le nombre réel $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire sous forme de fraction.
Donc, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. On dit que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Exercice 1

a) Écrire 3,23 sous forme de fraction.
b) Est-ce que le nombre 3,23 est un nombre rationnel ?
c) Est-ce que le nombre 3,23 est un nombre décimal ?
d) Écrire le nombre $17,\underline{23}\ldots$ sous forme de fraction.
e) Est-ce que le nombre $17,\underline{23}\ldots$ est un nombre rationnel ?
f) Est-ce que le nombre $17,\underline{23}\ldots$ est un nombre décimal ?
g) Tous les nombres périodiques (les chiffres se répètent à l'infini), peuvent-ils s'écrire sous forme de fraction ?
h) Est-ce que $\sqrt{2}$ est un nombre périodique ? Justifier.
i) Compléter le tableau suivant avec les symboles $\in$ et $\notin$.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	
$-7,4$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	car $-7,4 = \frac{-74}{10}$
$-\frac{6}{2}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	parce que $-\frac{6}{2} = -3$
7					
$-\frac{1}{4}$					
$\sqrt{2}$					
$\sqrt{25}$					
0					
π					
$-\frac{\frac{3}{4}}{2}$					
$-\frac{3}{\frac{2}{6}}$					

Solution de l'exercice 1

a) $3{,}23 = \frac{323}{100}$ b) Oui c) Oui d) $17{,}\underline{23}\ldots = \frac{1706}{99}$ e) Oui f) Non g) Oui

h) Si $\sqrt{2}$ est un nombre périodique
alors $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous forme de fraction
$\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
contradiction.
On a donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre périodique.

Remarque : on a utilisé un raisonnement par l'absurde.

i)

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	
$-7{,}4$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	car $-7{,}4 = \frac{-74}{10}$
$-\frac{6}{2}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	parce que $-\frac{6}{2} = 3$
7	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	
$-\frac{1}{4}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	
$\sqrt{2}$	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	
$\sqrt{25}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	
0	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	
π	$\notin$	$\notin$	$\notin$	$\in$	
$-\frac{\frac{3}{4}}{2}$	$\notin$	$\notin$	$\in$	$\in$	car $-\frac{\frac{3}{4}}{2} = -\frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}{2\times\frac{1}{2}} = -\frac{\frac{3}{8}}{1} = -\frac{3}{8} = -0{,}375$
$-\frac{3}{\frac{2}{6}}$	$\notin$	$\in$	$\in$	$\in$	car $-\frac{3}{\frac{2}{6}} = -\frac{\frac{3}{1}}{\frac{2}{6}} = -\frac{3}{1}\times\frac{6}{2} = -9$

2. Divisibilité, PGCD, PPCM

Soient m et n deux entiers relatifs.

m divise n ssi il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = k\,m$
m divise n ssi n est un multiple de m
m divise n ssi $m|n$

Exemple : ...
$-7 \nmid 6$
$-6|6$ car $6 = (-1)(-6)$
$-5 \nmid 6$
$-4 \nmid 6$
$-3|6$ car $6 = (-2)(-3)$
$-2|6$ car $6 = (-3)(-2)$
$-1|6$ car $6 = (-6)(-1)$
$0 \nmid 6$
$1|6$ car $6 = (6)(1)$
$2|6$ car $6 = (3)(2)$
$3|6$ car $6 = (2)(3)$
$4 \nmid 6$
$5 \nmid 6$
$6|6$ car $6 = (1)(6)$
$7 \nmid 6$
...
Les diviseurs de 6 sont $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$.

Exemple : ...
$-2|0$ car $0 = 0(-2)$
$-1|0$ car $0 = 0(-1)$
$0|0$ car $0 = 0(0)$
$1|0$ car $0 = 0(1)$
$2|0$ car $0 = 0(2)$
...
Les diviseurs de 0 sont $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$
Tous les entiers relatifs divisent 0.

On a: 0 divise uniquement 0.

Exemple : Les multiples de 2 sont $0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \ldots$
Exemple : L'unique multiple de 0 est 0 lui-même.

PGCD signifie « plus grand commun diviseur ».
PPCM signifie « plus petit commun multiple » strictement plus grand que 0.

Exercice 2

a) Est-ce que 21 est divisible par 3 ?
b) Est-ce que 21 est divisible par 1 ?
c) Est-ce que 21 est divisible par 21 ?
d) Est-ce que 21 est divisible par 5 ?
e) Quels sont les diviseurs de 6 ?
f) Quels sont les diviseurs de 9 ?
g) Quel est le plus grand commun diviseur de 6 et 9 ?
h) Quel est le plus petit commun multiple de 6 et 9 ?
i) Calculer $\frac{5}{6}+\frac{2}{9}$.
j) Quels sont les diviseurs de 20 ?
k) Quels sont les diviseurs de 30 ?
l) Quel est le plus grand commun diviseur de 20 et 30 ?
m) Quel est le plus petit commun multiple de 20 et 30 ?
n) Calculer $\frac{7}{30}-\frac{9}{20}$.
o) Quels sont les diviseurs de 3 ?
p) Quels sont les diviseurs de 4 ?
q) Quel est le plus grand commun diviseur de 3 et 4 ?
r) Quel est le plus petit commun multiple de 3 et 4 ?
s) Calculer $\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$.

Solution de l'exercice 2

a) Oui b) Oui c) Oui d) Non e) 1,-1,2,-2,3,-3,6,-6 f) 1,-1,3,-3,9,-9 g) 3 h) 18 i) $\frac{19}{18}$ j) 1,-1,2,-2,4,-4,5,-5,10,-10,20,-20 k) 1,-1,2,-2,3,-3,5,-5,6,-6,10,-10,15,-15,30,-30 l) 10 m) 60 n) $\frac{-13}{60}$ o) 1,-1,3,-3 p) 1,-1,2,-2,4,-4 q) 1 r) 12 s) $\frac{11}{12}$

3. Intervalles

Propriété

I est un interalle de $\mathbb{R}$ ssi $\begin{cases} I \subseteq \mathbb{R} \\ \forall (x,y) \in I^2, \forall z \in \mathbb{R}, (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I) \end{cases}$.

Exercice 3

Compléter avec $\in$ ou $\notin$.

1) $10 \quad \emptyset$
2) $1 \quad [5;5]$
3) $5 \quad [5;5]$
4) $10 \quad [5;5]$
5) $1 \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
6) $1{,}499999 \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
7) $1{,}5 \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
8) $4{,}6 \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
9) $5 \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
10) $5{,}0000001 \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
11) $7 \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
12) $1{,}5 \quad \left]\frac{3}{2};5\right]$
13) $1{,}500001 \quad \left]\frac{3}{2};5\right]$
14) $4{,}999999 \quad \left[\frac{3}{2};5\right[$
15) $5 \quad \left[\frac{3}{2};5\right[$
16) $-10000 \quad [-10;+\infty[$
17) $10000 \quad [-10;+\infty[$
18) $+\infty \quad [-10;+\infty[$
19) $-\infty \quad]-\infty;10[$
20) $-10000 \quad]-\infty;10[$
21) $10000 \quad]-\infty;10[$
22) $10 \quad \mathbb{R}$
23) $+\infty \quad \mathbb{R}$
24) $-\infty \quad \mathbb{R}$

Exercice 4

Simplifier et justifier.

1) $[-1{,}5;2[\cup]-1;3]$
   $[-1{,}5;2[\cap]-1;3]$
2) $]-\infty;1] \cup [-1;2[$
   $]-\infty;1] \cap [-1;2[$
3) $[-0{,}5;3] \cup [4;6[$
   $[-0{,}5;3] \cap [4;6[$
4) $]-3;1] \cup [-2;0[$
   $]-3;1] \cap [-2;0[$
5) $]-\infty;2{,}5] \cup [2{,}5;+\infty[$
   $]-\infty;2{,}5] \cap [2{,}5;+\infty[$
6) $[4;7{,}5[\cup [2;5{,}5[$
   $[4;7{,}5[\cap [2;5{,}5[$

Solution de l’exercice 3

1) $10 \quad \notin \quad \emptyset$
2) $1 \quad \notin \quad [5;5]$
3) $5 \quad \in \quad [5;5]$
4) $10 \quad \notin \quad [5;5]$
5) $1 \quad \notin \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
6) $1{,}499999 \quad \notin \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
7) $1{,}5 \quad \in \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
8) $4{,}6 \quad \in \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
9) $5 \quad \in \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
10) $5{,}0000001 \quad \notin \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
11) $7 \quad \notin \quad \left[\frac{3}{2};5\right]$
12) $1{,}5 \quad \notin \quad \left]\frac{3}{2};5\right]$
13) $1{,}500001 \quad \in \quad \left]\frac{3}{2};5\right]$
14) $4{,}999999 \quad \in \quad \left[\frac{3}{2};5\right[$
15) $5 \quad \notin \quad \left[\frac{3}{2};5\right[$
16) $-10000 \quad \notin \quad [-10;+\infty[$
17) $10000 \quad \in \quad [-10;+\infty[$
18) $+\infty \quad \notin \quad [-10;+\infty[$
19) $-\infty \quad \notin \quad]-\infty;10[$
20) $-10000 \quad \in \quad]-\infty;10[$
21) $10000 \quad \notin \quad]-\infty;10[$
22) $10 \quad \in \quad \mathbb{R}$
23) $+\infty \quad \notin \quad \mathbb{R}$
24) $-\infty \quad \notin \quad \mathbb{R}$

Solution de l’exercice 4

1) $[-1{,}5;2[\, \cup\,]-1;3] = [-1{,}5;3]$
   $[-1{,}5;2[\, \cap\,]-1;3] =]-1;2[$
2) $]-\infty;1] \cup [-1;2[\, = \,]-\infty;2[$
   $]-\infty;1] \cap [-1;2[\, = [-1;1]$
3) $[-0{,}5;3] \cup [4;6[$
   $[-0{,}5;3] \cap [4;6[\, = \emptyset$
4) $]-3;1] \cup [-2;0[\, = \,]-3;1]$
   $]-3;1] \cap [-2;0[\, = [-2;0[$
5) $]-\infty;2{,}5] \cup [2{,}5;+\infty[\, = \,]-\infty;+\infty[$
   $]-\infty;2{,}5] \cap [2{,}5;+\infty[\, = \{2{,}5\}$
6) $[4;7{,}5[\, \cup [2;5{,}5[\, = [2;7{,}5[$
   $[4;7{,}5[\, \cap [2;5{,}5[\, = [4;5{,}5[$

4. Calculer avec des rationnels

Exercice 5

Simplifier sans calculatrice.

$$A = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5} + 1 - \frac{1}{2}\right)$$
$$B = \frac{6}{7}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)$$
$$C = \frac{15}{39} \times \frac{26}{25} \times \frac{28}{42}$$
$$D = \frac{3 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$$
$$E = \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{3}\right) \times \frac{2 - \frac{4}{7}}{3} \times \frac{1}{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}$$
$$F = \frac{6 - \frac{5}{2} + \frac{3}{8}}{3 - \frac{5}{2} - \frac{7}{4}}$$
$$G = \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} - 2}$$
$$H = 13 \times \frac{49}{45} \times \frac{72}{91}$$

Exercice 6 (facultatif)

Simplifier sans calculatrice.

$$A = \frac{\frac{1}{1 - \pi} - \frac{1}{1 + \pi}}{1 + \frac{1}{\pi^2 - 1}}$$
$$B = \frac{7 - \frac{4}{\pi}}{12 - 21\pi}$$

Solution de l'exercice 5

$A = \frac{3}{5}$ $B = \frac{1}{7}$ $C = \frac{4}{15}$ $D = \frac{59}{32}$ $E = \frac{-11}{21}$ $F = \frac{-31}{10}$ $G = \frac{-16}{21}$ $H = \frac{56}{5}$

Solution de l'exercice 6

$A = \frac{-2}{\pi}$ $B = \frac{-1}{3\pi}$

5. Calculer avec des puissances et des racines carrées

Rappel :

- $a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n\ facteurs}$ si $n \geq 1$
- $a^0 = 1$ si $a \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ si $a \neq 0$
- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Exercice 7

Écrire les nombres suivants sous forme de puissance.

$A = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7$
$B = (2024)^0$
$C = \frac{1}{7^5}$
$D = \frac{1}{7^{-5}}$
$E = 7^2 . 7^3$
$F = (7^2)^3$
$G = \frac{7^5}{7^3}$
$H = \frac{7^3}{7^5}$
$I = 2^3 . 5^3$
$J = \frac{2^3}{5^3}$
$K = \sqrt{2}\sqrt{8}$
$L = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$
$M = 1^{-2024}$

Exercice 8

Simplifier.

$A = 27^{-3} \times (3^{-5})^{-2} \times \left(\frac{1}{9}\right)^{-5}$ $B = \frac{3^{-2} \times 9^5}{81^3}$ $C = (5^{-3} \times 10^7)^3$

$D = \left(\frac{4}{5}\right)^{-5} \times \left(\frac{25}{8}\right)^{-3}$ $E = \frac{(13\,\pi)^{-8}}{(26\,\pi^2)^{-4}}$ $F = (5\,\pi)^{-2} \times (-3\,\pi)^3$

Exercice 9

Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers.
Exemple : $\sqrt{28} = \sqrt{4 \times 7} = \sqrt{4} \times \sqrt{7} = 2\sqrt{7}$
$A = \sqrt{50}$ $B = \sqrt{72}$ $C = \sqrt{27}$ $D = \sqrt{48}$

Exercice 10

Simplifier.
$A = 9\sqrt{7} - 2\sqrt{28} - \frac{5}{3}\sqrt{63}$ $B = \sqrt{\frac{2}{9}}$ $C = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$ $D = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{10}}$

Exercice 11

Écrire les nombres suivants sous la forme $\frac{a}{b}$ où b est un entier naturel.
Exemple :
$\frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{2}+3} = \frac{\sqrt{8}+1}{\sqrt{2}+3} \times \frac{\sqrt{2}-3}{\sqrt{2}-3} = \frac{\sqrt{8}\sqrt{2}-3\sqrt{8}+1\sqrt{2}-3}{(\sqrt{2})^2-(3)^2} = \frac{\sqrt{16}-3\sqrt{2\times4}+\sqrt{2}-3}{2-9} = \frac{1-6\sqrt{2}+\sqrt{2}}{-7} = \frac{1-5\sqrt{2}}{-7} = \frac{-1+5\sqrt{2}}{7}$
$A = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ $B = \frac{\sqrt{7}-2}{3+\sqrt{7}}$ $C = \frac{\sqrt{2}+2}{5+\sqrt{2}}$

Solutions

Exercice 7 : $\mathrm{A} = 7^5$ $\mathrm{B} = 1$ $\mathrm{C} = 7^{-5}$ $\mathrm{D} = 7^5$ $\mathrm{E} = 7^5$ $\mathrm{F} = 7^6$ $\mathrm{G} = 7^2$ $\mathrm{H} = 7^{-2}$ $\mathrm{I} = 10^3$ $\mathrm{J} = \left(\frac{2}{5}\right)^3$
$K = 4$ $L = 5$ $M = 1$
Exercice 8 : $\mathrm{A} = 3^{11}$ $\mathrm{B} = \frac{1}{81}$ $\mathrm{C} = 2^{21} \times 5^{12}$ $\mathrm{D} = \frac{1}{10}$ $\mathrm{E} = \frac{2^4}{13^4}$ $\mathrm{F} = \frac{-27\pi}{25}$
Exercice 9 : $A = 5\sqrt{2}$ $B = 6\sqrt{2}$ $C = 3\sqrt{3}$ $D = 4\sqrt{3}$
Exercice 10 : $A = 0$ $B = \frac{\sqrt{2}}{3}$ $C = \sqrt{2}$ $D = \frac{\sqrt{6}}{2}$
Exercice 11 : $A = \frac{\sqrt{2}+1}{1}$ $B = \frac{5\sqrt{7}-13}{2}$ $C = \frac{3\sqrt{2}+8}{23}$

Exercice 12 (facultatif)

Simplifier

a) $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$

b) $\frac{4}{\sqrt{2}+3}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$

Exercice 13 (facultatif)

Simplifier

a) $\left(4\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)^2$

b) $\frac{2}{\sqrt{5}+4}-\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}-4}$

Solutions

Solution de l'exercice 12

a) $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$

$$\begin{aligned}
&= \left(3\sqrt{5}\right)^2+2\left(3\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}\right)^2\\
&= 9\times 5+6\sqrt{15}+3\\
&= 48+6\sqrt{15}
\end{aligned}$$

b) $\frac{4}{\sqrt{2}+3}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}-3}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\left(\sqrt{2}-3\right)}{\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{2}-3\right)}+\frac{5\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+3\right)}{\left(\sqrt{2}-3\right)\left(\sqrt{2}+3\right)}\\
&= \frac{4\left(\sqrt{2}-3\right)+5\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+3\right)}{\left(\sqrt{2}+3\right)\left(\sqrt{2}-3\right)}\\
&= \frac{4\sqrt{2}-12+5\times 2+15\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-(3)^2}\\
&= \frac{-2+19\sqrt{2}}{2-9}\\
&= \frac{-2+19\sqrt{2}}{-7}\\
&= \frac{2-19\sqrt{2}}{7}
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 13

a) $37-8\sqrt{10}$ b) $\frac{23+10\sqrt{5}}{11}$

6. Développement d'expressions algébriques

Exercice 14 : « Quelques identités remarquables »

Prouver que :

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
3) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$;
4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$;
7) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Exercice 15

Développez.

$A = 4x(3x-2)$
$B = (2x-4)(-3x+5)$
$C = (x+3)(2x-3)$
$D = (x^2-1)(2-2x^2)$

$E = (a+2)(a^2-2a+4)$
$F = (x^2+x+1)(2x-5)$
$G = (x^2+x+1)(1-x)$

$H = (5x+3)^2$
$I = (3x-4)^2$
$J = (2x-3)(2x+3)$

$K = (4-x)^2 + (x-4)^2$
$L = \left(x\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)^2$

Solution de l'exercice 15

$A = 12x^2 - 8x$ $B = -6x^2 + 22x - 20$ $C = 2x^2 + 3x - 9$ $D = -2x^4 + 4x^2 - 2$
$E = a^3 + 8$ $F = 2x^3 - 3x^2 - 3x - 5$ $G = -x^3 + 1$
$H = 25x^2 + 30x + 9$ $I = 9x^2 - 24x + 16$ $J = 4x^2 - 9$
$K = 2x^2 - 16x + 32$ $L = 2x^2 + 4\sqrt{6}\,x + 12$

7. Factorisation

Exercice 16

FACTORISATIONS

Cas n°1 le facteur apparaît immédiatement

Ex : $A = \underline{(x-3)}(2x+5) + \underline{(x-3)}(x-1)$
$= (x-3)[(2x+5)+(x-1)]$
$= (x-3)(3x+4)$

Factorisez de même :
$B = (x+4)(3x-1) + (7x-3)(x+4)$
$C = (2x-1)(x-2) - (2x-1)(2x+5)$
$D = (x+7)(x+1) - (x+7)(x-3) + (x-5)(x+7)$

Cas n°2 le facteur est très visible mais il faut effectuer un changement de signe.

Ex : $A = (x-3)(x+4) + (3-x)(2x+1)$
$= \underline{(x-3)}(x+4) - \underline{(x-3)}(2x+1)$
$= (x-3)[(x+4)-(2x+1)]$
$= (x-3)(-x+3)$

Factorisez de même :
$B = (2x+1)(x-4) + (4-x)(x+5)$
$C = (2-3x)(x-7) - (3x-2)(2x-1)$
$D = (x+6)(3x+1) - (-x-6)(x+4)$

Cas n°3 le facteur est visible, mais pour le faire apparaître entièrement, il faut mettre un nombre en facteur dans l'un des termes.

Ex : $A = (x-3)(x-1) + (2x-6)(x+4)$
$= \underline{(x-3)}(x-1) + 2\underline{(x-3)}(x+4)$
$= (x-3)[(x-1)+2(x+4)]$
$= (x-3)(3x+7)$

Factorisez de même :
$B = (2x-1)(x+4) - (6x-3)(x+1)$
$C = (4x+8)(x-3) + (5x-1)(x+2)$
$D = (3x-1)(2x+1) + (-6x+2)(x-1)$

Cas n°4 Pour faire apparaître le facteur commun, il faut utiliser l'identité remarquable : $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

Ex : $A = (3x-4)(x+2) + x^2 - 4$
$= (3x-4)(x+2) + (x+2)(x-2)$
$= (x+2)[(3x-4)+(x-2)]$
$= (x+2)(4x-6)$
$= 2(x+2)(2x-3)$

Factorisez de même :
$B = (2x-1)(x-3) + x^2 - 9$
$C = (2x+3)(x-1) + 4x^2 - 9$
$D = (1-4x)(x+2) + 1 - 16x^2$
$E = (x-1)(x+4) + x^2 - 1 + (3x+2)(x-1)$

Cas n°5 Pour faire apparaître le facteur commun, il faut utiliser l'une des deux identités remarquables :
$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ $\quad$ $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$

Ex : $A = (x+2)(3x-1) + x^2 + 4x + 4$
$= (x+2)(3x-1) + (x+2)^2$
$= \underline{(x+2)}(3x-1) + \underline{(x+2)}(x+2)$
$= (x+2)[(3x-1)+(x+2)]$
$= (x+2)(4x+1)$

Factorisez de même :
$B = (x+3)(x-4) + x^2 + 6x + 9$
$C = (2x-1)(x-3) + 4x^2 - 4x + 1$
$D = x^2 - 8x + 16 + (x-3)(x-4)$
$E = 3(x-2) + x^2 - 4x + 4$

Cas n°6 le facteur commun constitue à lui seul l'un des termes, une fois celui-ci mis en facteur, il faut penser à placer « 1 » dans le crochet.

Ex : $A = (3x-1)(x-2) + 3x - 1$
$= \underline{(3x-1)}(x-2) + 1\underline{(3x-1)}$
$= (3x-1)[(x-2)+1]$
$= (3x-1)(x-1)$

Factorisez de même :
$B = (x+5)(3x-5) + (3x-5)$
$C = 2x - 7 - (x-3)(2x-7)$
$D = (x+4)(2x-5) - 5 + 2x$

Cas n°7 Pas de facteur commun, l'ensemble de l'expression est une différence de deux carrés.

Ex : $A = x^2 + 4x + 4 - (2x-1)^2$
$= (x+2)^2 - (2x-1)^2$
$= [(x+2)+(2x-1)][(x+2)-(2x-1)]$
$= (3x+1)(-x+3)$

Factorisez de même :
$B = 16 - (7x-3)^2$
$C = 9(x+2)^2 - (x^2+2x+1)$
$D = 16(2x+3)^2 - 25x^2$

Factorisations regroupant plusieurs cas :

N°2 et n°3 : $A = (3x-1)(x+4) + (-6x+2)(x-5)$
N°2 et n°4 : $B = (2-x)(x+7) + x^2 - 4$
N°2 et n°5 : $C = (3-x)(x+4) + x^2 - 6x + 9$
N°2 et n°5 : $D = (2x+1)(x-4) - x^2 + 8x - 16$
n° 2 et n°6 : $E = (2x-3)(x-7) - 2x + 3$
n°3 et n°4 : $F = (3x-9)(x-2) + x^2 - 9$
n° 3 et n°5 : $G = x^2 - 2x + 1 - (3x-3)(x+2)$
n°4 et n°6 : $H = (x^2-25) - (x-5)$

Solution de l'exercice 16

Cas n°1

$B = (x+4)(10x-4)$ $C = (2x-1)(-x-7)$ $D = (x+7)(x-1)$

Cas n°2

$B = (x-4)^2$ $C = (2-3x)(3x-8)$ $D = (x+6)(4x+5)$

Cas n°3

$B = (2x-1)(-2x+1) = -(2x-1)^2$ $C = (x+2)(9x-13)$ $D = 9x-3$

Cas n°4

$B = (x-3)(3x+2)$; $C = (2x+3)(3x-4)$; $D = (1-4x)(5x+3)$; $E = (x-1)(5x+7)$

Cas n°5

$B = (x+3)(2x-1)$; $C = (2x-1)(3x-4)$; $D = (x-4)(2x-7)$; $E = (x-2)(x+1)$

Cas n°6

$B = (3x-5)(x+6)$ $C = (2x-7)(4-x)$ $D = (2x-5)(x+5)$

Cas n°7

$B = 7(1-x)(7x+1)$ $C = (2x+5)(4x+7)$ $D = (3x+12)(13x+12)$

Factorisations regroupant plusieurs cas

$A = (3x-1)(-x+14)$ $B = 5(2-x)$ $C = -7(x-3)$
$D = (x-4)(x+5)$ $E = (2x-3)(x-8)$ $F = (x-3)(4x-3)$
$G = (1-x)(2x+7)$ $H = (x-5)(x+4)$

8. ÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

Exercice 17

<u>Cas n°1</u>: équations du premier degré simples.

Ex: $5x+2=9x+7 \qquad /-9x-2$

$\Leftrightarrow 5x-9x=7-2$

$\Leftrightarrow -4x=5 \qquad /:-4$

$\Leftrightarrow x=\frac{-5}{4}$

$S=\left\{\frac{-5}{4}\right\}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $2x+3=3x-5$; b) $5x-1=2x+4$;
c) $2+x-(5+2x)-7=3x+7$.

<u>Cas n°2</u>: équations du premier degré contenant des fractions.

Ex: $\frac{x}{3}+\frac{9}{4}=-\frac{5x}{6}+\frac{15}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{x}{3}+\frac{9}{4}\right)12=\left(-\frac{5x}{6}+\frac{15}{2}\right)12 \Leftrightarrow 4x+9(3)=-5x(2)+15(6)$

$\Leftrightarrow 4x+27=-10x+90 \Leftrightarrow 4x+10x=90-27 \Leftrightarrow 14x=63 \Leftrightarrow x=\frac{63}{14}$.

$S=\left\{\frac{63}{14}\right\}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a)$\frac{5(x-2)}{8}+\frac{3(1-x)}{5}=\frac{2x+3}{10}$; b)$\frac{2x+3}{6}-\frac{x-1}{6}=\frac{x+2}{3}+2$; c)$\frac{2x+3}{2}=\frac{7x-2}{3}$.

<u>Cas n°3</u>: équations du premier degré dont l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$ ou $\emptyset$.

Ex 1: $2(x+5)=2x+10 \Leftrightarrow 2x+10=2x+10 \Leftrightarrow 2x-2x=10-10 \Leftrightarrow 0=0$. $S=\mathbb{R}$.

Ex 2: $2(x+5)=2x-9 \Leftrightarrow 2x+10=2x-9 \Leftrightarrow 2x-2x=-9-10 \Leftrightarrow 0=-19$. $S=\emptyset$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a)$2(x+4)+1-5x=3(1-x)+7$; b)$\frac{1}{3}(x+2)-\frac{3}{4}(x-2)=\frac{1}{12}(-5x+2)+2$;
c)$\frac{x+3}{2}-\frac{4x-3}{3}-1=-\frac{5x-12}{6}$.

<u>Cas n°4</u>: équations se ramenant au premier degré.

Ex: $(x+2)^2=(x+2)(5x-4) \qquad \Leftrightarrow (x+2)^2-(x+2)(5x-4)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)[(x+2)-(5x-4)]=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x+2-5x+4)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(-4x+6)=0$

$\Leftrightarrow x+2=0 \ ou \ -4x+6=0$

$\Leftrightarrow x=-2 \ ou \ 6=4x$

$\Leftrightarrow x=-2 \ ou \ \frac{6}{4}=x$

$\Leftrightarrow x=-2 \ ou \ x=\frac{3}{2}$.

$S=\left\{-2;\frac{3}{2}\right\}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $(3x+2)^2=4(2x-3)^2$; b)$(2x+3)^2=36$; c)$5x^2-7x=0$;
d) $(3x-4)(-5x-2)=(4-3x)(3-2x)$; e) $(2x-3)(x^2+1)=0$; f) $(3x+2)^2=-12$;
g) $(2x+3)^2=0$.

<u>Exercices supplémentaires</u>: Résoudre dans $\mathbb{R}$: a) $9x^2-16=0$; b) $4x^2-9-2(2x-3)+x(2x-3)=0$;
c) $(x-2)(x+3)-(2-x)(2x+1)+x^2-4=0$; d)$3x^2-2\sqrt{3}x+1=0$.

Solution de l'exercice 17

cas n°1:a) $\{8\}$b) $\left\{\frac{5}{3}\right\}$c) $\left\{\frac{-17}{4}\right\}$;cas n°2:a) $\left\{\frac{-38}{7}\right\}$;b) $\{-12\}$;c) $\left\{\frac{13}{8}\right\}$; cas n°3: a) $\{\ \}$;b) $\mathbb{R}$;c)$\emptyset$; cas n°4 : a) $\left\{\frac{4}{7};8\right\}$;b) $\left\{\frac{-9}{2};\frac{3}{2}\right\}$;c) $\left\{0;\frac{7}{5}\right\}$; d) $\left\{\frac{1}{7};\frac{4}{3}\right\}$;e) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$;f) $\emptyset$;
g) $\left\{\frac{-3}{2}\right\}$; exercices supplémentaires: a)$\left\{\frac{-4}{3};\frac{4}{3}\right\}$ b)$\left\{\frac{-1}{3};\frac{3}{2}\right\}$ c)$\left\{\frac{-3}{2};2\right\}$ d)$\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

9. Inéquations du premier degré à une inconnue

Soient 3 nombres réels a, b et c.

- $a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + c < b + c$
  Exemple : $2 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2 + 4 < 5 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 6 < 9$
- $Si\ c > 0\ alors \quad a < b \quad \Leftrightarrow \quad a\,c < b\,c$.
  Exemple : $2 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times 10 < 5 \times 10 \quad \Leftrightarrow \quad 20 < 50$.
- $Si\ c < 0\ alors \quad a < b \quad \Leftrightarrow \quad a\,c > b\,c$.
  Exemple : $2 < 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \times (-10) > 5 \times (-10) \quad \Leftrightarrow \quad -20 > -50$.

- Si $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ alors $a\,b > 0$.
  Exemple : $2 \times 6 > 0$
- Si $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases}$ alors $a\,b > 0$.
  Exemple : $(-2) \times (-6) = 12 > 0$
- Si $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases}$ alors $a\,b < 0$.
  Exemple : $(2) \times (-6) = -12 < 0$

Exercice 18

Résoudre les inéquations suivantes dans ℝ et représenter leurs solutions sur une droite graduée.

a) $-2x + 3 > 0$
b) $2x - 3 \leq 0$
c) $2x - 3 \leq 3x + 5$
d) $4x + \sqrt{3} \leq 4x - 1$
e) $4x + \sqrt{3} \geq 4x - 1$
f) $-2(x^2 + 1) < 0$
g) $(x - 4)^2 \leq -1$

Exercice 19 (facultatif)

Résoudre les inéquations suivantes dans ℝ et représenter leurs solutions sur une droite graduée.

a) $4x - 3 \geq 0$
b) $-4x - 3 < 0$
c) $2x - 3 > 3x + 5$
d) $-3x + 5 > -3x + 1$
e) $-3x + 5 < -3x + 1$
f) $5(x^2 + 10) \leq 0$
g) $(5x + 1)^2 + 9 > 0$

Exercice 20

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ et représenter leurs solutions sur une droite graduée.

a) $(3x-7)(-2x+1) \leq 0$;
b) $(3x-7)(-2x+1) < 0$;
c) $(3x-7)(-2x+1) \geq 0$;
d) $(3x-7)(-2x+1) > 0$.

Exercice 21

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ et représenter leurs solutions sur une droite graduée.

a) $(4x+1)(-5x+3) \leq 0$;
b) $(4x+1)(-5x+3) < 0$;
c) $(4x+1)(-5x+3) \geq 0$;
d) $(4x+1)(-5x+3) > 0$.

Exercice 22

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ et représenter leurs solutions sur une droite graduée.

a) $(5x+2)(x-3) \leq 0$;
b) $(5x+2)(x-3) < 0$;
c) $(5x+2)(x-3) \geq 0$;
d) $(5x+2)(x-3) > 0$.

Exercice 23

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ et représenter leurs solutions sur une droite graduée.

a) $\frac{3x+1}{x+2} \geq 0$;
b) $\frac{-2x+1}{3x+2} \geq 0$.

Exercice 24

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$ et représenter leurs solutions sur une droite graduée.

a) $\frac{-3x-5}{-x+4} \leq 0$;
b) $\frac{4x-3}{-2x+5} \leq 0$.

Exercice 25 (facultatif)

Résoudre l'inéquation suivante dans $\mathbb{R}$ et représenter ses solutions sur une droite graduée.

a) $x(x-5)-4(x-5) \geq 0$
b) $(x-2)(3x+5)(3-7x) < 0$
c) $x(1-x)(2-x) \geq 0$
d) $\frac{2x+1}{x+2} \geq x$
e) $x^2-9 < 0$
f) $x^2+3x \geq 0$
g) $\frac{7x-2}{4x^2-1} < 0$
h) $\frac{1}{2x+3} \leq 2$
i) $\frac{(3-x)(2x+3)}{x-3} \leq 0$

Solutions

Exercice 18 : a) $S = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$ b) $S = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$ c) $S = [-8; +\infty[$ d) $S = \emptyset$ e) $S = \mathbb{R}$ f) $S = \mathbb{R}$ g) $S = \emptyset$

Exercice 19 : a) $S = \left[\frac{3}{4}; +\infty\right[$ b) $\left]\frac{-3}{4}; +\infty\right[$ c) $S =]-\infty; -8[$ d) $S = \mathbb{R}$ e) $S = \emptyset$ f) $S = \emptyset$ g) $S = \mathbb{R}$

Exercice 20 :

a) $S = \left]-\infty\,; \frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{3}\,; +\infty\right[$
b) $S = \left]-\infty\,; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{7}{3}\,; +\infty\right[$
c) $S = \left[\frac{1}{2}\,; \frac{7}{3}\right]$
d) $S = \left]\frac{1}{2}\,; \frac{7}{3}\right[$

Exercice 21 :

a) $S = \left]-\infty\,; \frac{-1}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{5}\,; +\infty\right[$
b) $S = \left]-\infty\,; \frac{-1}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{5}\,; +\infty\right[$
c) $S = \left[\frac{-1}{4}\,; \frac{3}{5}\right]$
d) $S = \left]\frac{-1}{4}\,; \frac{3}{5}\right[$

Exercice 22 :

a) $S = \left[\frac{-2}{5}\,; 3\right]$
b) $S = \left]\frac{-2}{5}\,; 3\right[$
c) $S = \left]-\infty\,; \frac{-2}{5}\right] \cup [3\,; +\infty[$
d) $S = \left]-\infty\,; \frac{-2}{5}\right[\cup]3\,; +\infty[$

Exercice 23 :

a) $S =]-\infty\,; -2[\cup \left[\frac{-1}{3}\,; +\infty\right[$
b) $S = \left]\frac{-2}{3}\,; \frac{1}{2}\right]$

Exercice 24 :

a) $S = \left[\frac{-5}{3}\,; 4\right[$
b) $S = \left]-\infty\,; \frac{3}{4}\right] \cup \left]\frac{5}{2}\,; +\infty\right[$

Exercice 25 :

a) $\mathrm{S} =]-\infty; 4] \cup [5; +\infty[$
b) $\mathrm{S} = \left]\frac{-5}{3}; \frac{3}{7}\right[\cup]2; +\infty[$
c) $\mathrm{S} = [0; 1] \cup [2; +\infty[$
d) $\mathrm{S} =]-\infty; -2[\cup [-1; 1]$
e) $\mathrm{S} =]-3\,; 3[$
f) $\mathrm{S} =]-\infty\,; -3] \cup [0\,; +\infty[$
g) $\mathrm{S} = \left]-\infty\,; \frac{-1}{2}\right[\cup \left]\frac{2}{7}\,; \frac{1}{2}\right[$
h) $\mathrm{S} = \left]-\infty; \frac{-3}{2}\right[\cup \left[\frac{-5}{4}; +\infty\right[$
i) $\mathrm{S} = \left[\frac{-3}{2}; 3\right[\cup]3; +\infty[$

10.Tableau de signe de ax+b

Exercice 26

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.
Déterminer le tableau de signe de f.

11.Systèmes d'inéquations à une inconnue

Exercice 27

Résoudre les systèmes d'inéquations dans ℝ et représenter ses solutions sur une droite graduée.

a) $\begin{cases} 2x - 3 > 5x - 1 \\ x + 4 \geq 3x - 2 \end{cases}$

b) $-5 < 8 - 5x < \frac{11}{3}$

c) $\begin{cases} -3 < 2x - 5 \leq 5 \\ -12 < -3x + 6 \leq 0 \end{cases}$

Exercice 28 (facultatif)

Résoudre les systèmes d'inéquations dans ℝ et représenter ses solutions sur une droite graduée.

a) $\begin{cases} 2x - 3 > x + 1 \\ 3x - 1 \leq 2x + 7 \end{cases}$

b) $-4 \geq 8 - 3x \geq -10$

c) $\begin{cases} -5 < 3x + 1 \leq -2 \\ 0 \leq -2x + 6 \leq 4 \end{cases}$

Solution

Exercice 27 : a) $S = \left]-\infty; \frac{-2}{3}\right[$ b) $S = \left]\frac{13}{15}; \frac{13}{5}\right[$ c) $S = [2; 5]$

Exercice 28 : a) $S =]4; 8]$ b) $S = [4; 6]$ c) $S = \emptyset$

12.Ensembles de nombres, équations et inéquations - Tests Communs

Exercice 29

QCM - les quatre questions de cet exercice sont indépendantes. Exactement une réponse est correcte. Noter sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie et ***donner la justification de cette réponse****.*
Chaque bonne réponse justifiée rapporte 0,75 point, une bonne réponse sans justification rapporte 0,25 point, l'absence de réponse ou une réponse fausse vaut 0 point.

1. L´ensemble des réels x vérifiant $x \langle \frac{7}{5}$ et $x \geq \frac{5}{7}$ est:

   a) $\left[\frac{7}{5};\frac{5}{7}\right[$ b) $\left[\frac{5}{7};\frac{7}{5}\right[$ c) $\left]\frac{5}{7};\frac{7}{5}\right]$ d) $\left[\frac{5}{7};\frac{7}{5}\right]$

2. L'expression $\dfrac{2^{-3}\cdot 9^{2}\cdot 24\cdot 5^{-2}}{2^{6}\cdot 3^{-2}\cdot 81\cdot 5^{3}}$ est égale à:

   a) $\dfrac{3^3}{2^5\cdot 5^6}$ b) $\dfrac{3^4}{2^5\cdot 5^6}$ c) $\dfrac{3^3}{2^6\cdot 5^5}$ d) $\dfrac{3^4}{2^6\cdot 5^5}$

3. L'expression $\sqrt{48}-2\sqrt{12}+\sqrt{75}-\sqrt{27}$ est égale à :

   a) $4\cdot\sqrt{3}$ b) $2\cdot\sqrt{3}$ c) $-2\cdot\sqrt{3}$ d) $8\cdot\sqrt{3}$

4. On considère deux intervalles $I=\left[\,4{,}5\ ;\ 6\right]$ et $J=\left[-3\ ;\ 5{,}5\right[$. Alors :

   a) $I\cap J=[4{,}5;5{,}5]$ b) $I\cup J=[-3;6[$ c) $I\cup J=]-3;6]$ d) $I\cap J=[4{,}5;5{,}5[$.

Exercice 30

QCM - les quatre questions de cet exercice sont indépendantes. Exactement une réponse est correcte. Noter sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie et ***donner la justification de cette réponse****.*
Chaque bonne réponse justifiée rapporte 0,5 point, une bonne réponse sans justification rapporte 0,25 point, l'absence de réponse ou une réponse fausse vaut 0 point.

1. L'ensemble des réels x vérifiant l'inégalité $-6 < x-3 \leq 2$ est :

   a) $[-3;5]$ b) $]-3;5]$ c) $[-3;5[$

2. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+1\geq 0$ est

   a) $\mathbb{R}$ b) $\emptyset$ c) $[-1;1]$

3. Le nombre $10^2\times 10^{-3}$ est égal à :

   b) 10^{-6} b) $0{,}1$ c) $\dfrac{10^3}{10^2}$

4. Le nombre $\sqrt{8}\times 3\sqrt{2}$ est égal à :

   a) $3\sqrt{10}$ b) $\sqrt{48}$ c) 12

Exercice 31 (facultatif)

QCM - les quatre questions de cet exercice sont indépendantes. Exactement une réponse est correcte. Noter sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie et ***donner la justification de cette réponse****.*
Chaque bonne réponse justifiée rapporte 1 point, une bonne réponse sans justification rapporte 0,25 point, l'absence de réponse ou une réponse fausse vaut 0 point.

1. L´ensemble des réels x vérifiant $x \langle \frac{4}{3}$ et $x \geq \frac{3}{4}$ est:

   a) $\left[\frac{4}{3};\frac{3}{4}\right[$ b) $\left[\frac{3}{4};\frac{4}{3}\right[$ c) $\left]\frac{3}{4};\frac{4}{3}\right[$

2. Si $\neq 0$ et $b \neq 0$ et $a \neq -b$, alors la forme simplifiée de l´expression $\dfrac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}}$ est:

   a) $\dfrac{a-b}{a+b}$ b) $\left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^2$ c) 1

3. Le résultat de l'expression $\dfrac{5^{126}7^{45}3^{561}}{7^{46}3^{562}5^{124}}$ est égal à:

b) $\frac{5}{21}$ b) $\frac{35}{3}$ c) $\frac{15}{7}$ d) $\frac{25}{21}$

4. Le résultat de l'expression $\sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{320}$ est égal à :

c) $-3\sqrt{5}$ b) $7\sqrt{5}$ c) $-7\sqrt{5}$ d) $3\sqrt{5}$

Exercice 32 (facultatif)

QCM - les quatre questions de cet exercice sont indépendantes. Exactement une réponse est correcte. Noter sur la copie la lettre correspondante à la réponse choisie et ***donner la justification de cette réponse****.*
Chaque bonne réponse justifiée rapporte 1 point, une bonne réponse sans justification rapporte 0,25 point, l'absence de réponse ou une réponse fausse vaut 0 point.

1. $-2x+3 \leq 0$ signifie que :

a) $x \in \left[\frac{3}{2};+\infty\right[$ b) $x \in \left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$ c) $x \in \left]-\infty;\frac{3}{2}\right]$ d) $x \in \left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]$

2. On donne $I=[3;6,5]$, $J=[-3,5;4[$. Alors

b) $I \cap J=[3;4]$ b) $I \cup J=[-3,5;6,5]$ c) $I \cup J=[3;4[$ d) $I \cap J=[-3,5;3]$

3. Quelle est l'expression égale à $a-\dfrac{b-c}{b}$?

c) $ab-b-c$ b) $a+\dfrac{c}{b}$ c) $\dfrac{ab-b-c}{b}$ d) $a-1+\dfrac{c}{b}$

4. La somme de $\dfrac{a}{b}$ et de $\dfrac{x}{y}$ est égale à :

d) $\dfrac{ax}{by}$ b) $\dfrac{a+x}{b+y}$ c) $\dfrac{a+y}{b+x}$ d) $\dfrac{ay+bx}{by}$

Exercice 33 (facultatif)

Choisissez la bonne réponse et justifiez votre choix. Exactement une réponse est correcte.

Quelle est la valeur de A, $A = \dfrac{14}{2+\frac{3}{2}} - 4$?

a) A=0 b) A=1 c) A=-3

Exercice 34

1. On considère l'expression:

$$A(x) = (x-2)(3-2x) - (x-5)(-2x+4) + 3(x-2)^2.$$

a. Développer et simplifier $A(x)$.

b. Calculer $A(2)$ et $A(\sqrt{3})$.

2. On considère l'expression:

$$B(x) = (x-2)(3-2x) - 2\left(4x^2 - 12x + 9\right) + 3\left(4x^2 - 9\right).$$

a. Factoriser $B(x)$.

b. En utilisant la forme factorisée de $B(x)$, résoudre dans ℝ l'inéquation $B(x) \leq 0$.

Exercice 35

Soit l'expression:

$$A(x) = 6(x-1)^2 + 2(x^2-1) + 4x^2(1-x).$$

1. Développer et simplifier $A(x)$.
2. Calculer $A(-1)$ et A($\sqrt{6}$). (On peut utiliser la forme simplifiée de $A(x)$.)
3. Factoriser $A(x)$.
4. En utilisant la forme factorisée de $A(x)$, résoudre dans ℝ l'équation $A(x) = 0$.

Exercice 36 (facultatif)

On considère l'expression:

$$A(x) = (x-4)(3x+2) - (x-4)^2 - 3(4-x).$$

1. Développer et simplifier $A(x)$.
2. Calculer $A(-2)$ et $A(\sqrt{3})$.
3. Factoriser $A(x)$.
4. En utilisant la forme factorisée de $A(x)$, résoudre dans ℝ l'équation$A(x) = 0$.
5. Résoudre dans $R\backslash\{4\}$ l'inéquation $\frac{(x-4)(2x+9)}{4-x} < 0$.

Exercice 37

On considère les expressions:

$$A(x)=(3-x)(2x-1)-(x-3)(-5x+2)+6(x-3)^2$$

$$B(x)=4(4x^2-36x+81)-3(2x-9)(x+1)+9-2x$$

1. Développer et simplifier $A(x)$.
2. Calculer $A(-1)$ et $A(\sqrt{3})$.
3. Factoriser $B(x)$.
4. En utilisant la forme factorisée de $B(x)$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $B(x)\leq 0$.

Exercice 38

Soit l'expression $A(x)=(x-2)(3x-1)-(x-2)(-2x+1)+5(x-2)^2$.

1. Développer et simplifier $A(x)$.
2. Calculer $A(-2)$ et $A(\sqrt{2})$.
3. Factoriser $A(x)$.
4. En utilisant la forme factorisée de $A(x)$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=0$.

Exercice 39 (facultatif)

Soit l'expression $A(x)=(2x-3)^2-(5-x)^2$.

1) Développer et réduire $A(x)$.

2) Calculer la valeur de $A(x)$ pour $x=-2$ et $x=2\sqrt{3}$.

3) Factoriser $A(x)$.

4) En utilisant la forme factorisée de $A(x)$, résoudre dans ***IR*** :

a) L'équation $A(x)=0$.

b) L'inéquation $A(x)\leq 0$.

Solutions

Exercice 29 : 1b ; 2c ; 3b ; 4d.

Exercice 30 : 1b ; 2a ; 3b ; 4c.

Exercice 34 : 1a) $A(x)=3x^2-19x+26$ 1b) $A(2)=0$ et $A(\sqrt{3})=35-19\sqrt{3}$
2a) $B(x)=(2x-3)(x+17)$ 2b) $S=\left[-17;\frac{3}{2}\right]$.

Exercice 35 : 1) $A(x)=-4x^3+12x^2-12x+4$ 2) $A(-1)=32$ et $A(\sqrt{6})=76-36\sqrt{6}$
3) $A(x)=-4(x-1)^3$ 4) $S=\{1\}$.

Exercice 37 : 1) $A(x)=9x^2-46x+57$ 2) $A(-1)=112$ et $A(\sqrt{3})=84-46\sqrt{3}$
3) $B(x)=(2x-9)(5x-40)$ 4) $S=\left[\frac{9}{2};8\right]$.

Exercice 38 : 1) $A(x)=10x^2-32x+24$ 2) $A(-2)=128$ et $A(\sqrt{2})=44-32\sqrt{2}$
3) $A(x)=(x-2)(10x-12)$ 4) $S=\{2;1,2\}$.